Merci pour l'intérêt que vous portez à cette jolie démonstration.

Il existe une manière relativement directe pour arriver à la solution en utilisant quelques formules de dérivation « brutes » données ci-dessous.

Plutôt que de vous donner une réponse académique, je m'appliquerai à décrypter pas à pas et en français les différentes étapes (un étudiant se verrait plutôt demandé une écriture plus condensée car il y serait entraîné…)

	Fonction f	Dérivée f'
Formule (0)	$x \mapsto \text{constante}$	$x \mapsto 0$
Formule (1)	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$
Formule (2)	$x \mapsto ax + b$	$x \mapsto a$
Formule (3)	$x \mapsto u(x) + v(x)$ où u et v sont deux fonctions	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$
Formule (4)	$x \mapsto a{\times}u(x)$ où a et u sont respectivement un réel et une fonction	$x \mapsto a{\times}u'(x)$
Formule (5)	$x \mapsto \sqrt{u(x)}$ où u est une fonction	$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Notre fonction T est définie par $T(x) = 5\sqrt{36 + x^2} + 4(20 - x)$

Il est habile de considérer T comme la somme des deux fonctions d'expressions respectives $5\sqrt{36 + x^2}$ et $4(20 - x)$.
Par application de la Formule (3), T' est la somme des dérivées de ces deux fonctions.

Commençons par la seconde qui est la plus simple :

$\boxed{4(20 - x) = -4x + 80 \text{ et sa dérivée est } -4}$ d'après la Formule (2)

Dérivons à présent $5\sqrt{36 + x^2}$. Il s'agit du produit de 5 par la fonction $\sqrt{36 + x^2}$. En vertu de la Formule (4), sa dérivée est le produit de 5 par la dérivée de $\sqrt{36 + x^2}$
Cette dernière, d'après la Formule (5) est égale à $\frac{\text{dérivée de } (36+x^2)}{2\sqrt{36+x^2}}$
La Formule (3) nous dit que la dérivée de $(36 + x^2)$ est la somme des dérivées de 36 et de x^2, soit d'après les Formules (0) et (1), respectivement 0 et $2x$. La dérivée de $(36 + x^2)$ est donc $2x$.
Ainsi, $\frac{\text{dérivée de } (36+x^2)}{2\sqrt{36+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{36+x^2}}$ après la simplification par 2.

Pour conclure, $\boxed{\text{la dérivée de } 5\sqrt{36 + x^2} \text{ est } 5\frac{x}{\sqrt{36+x^2}} \text{ qui s'écrit aussi } \frac{5x}{\sqrt{36+x^2}}}$

La dérivée, d'après ce que nous avons vu au début est la somme des deux dérivées que nous avons trouvées :

$$T'(x) = \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} - 4$$

Bonus : puisque vous semblez sensible à l'élégance en mathématique, je ne résiste pas à vous proposer un joli approfondissement qui nous dispense de l'usage de formules toutes faites. Une seule, en vérité, est nécessaire (toutes les autres sont déduites !)

(a) « La dérivée de x^n est $n \times x^{n\text{-}1}$ »

Nous avons aussi besoin de quelques règles supplémentaires :

(b) « $x^0 = 1$ quelle que soit la valeur de x »

(c) « La racine carrée de A peut s'écrire $\sqrt{A} = A^{1/2}$ »

(d) « si x est non nul, x^{-k} peut s'écrire aussi $\frac{1}{x^k}$

(e) « La dérivée de la fonction d'un argument est égale au produit de la dérivée de cette fonction par la dérivée de l'argument de cette fonction »

---*---**

(a) conduit au fait que la dérivée d'une constante $C = C \times 1 = C \times x^0$ vaut $0 \times C \times x^{0-1} = 0$. La Formule (0) est démontrée.

(a) conduit aussi au fait que la dérivée de x^2 est $2 \times x^{2-1} = 2x$. La Formule (1) est démontrée aussi.

(a) et (c) conduisent au fait que la dérivée de $\sqrt{u} = u^{1/2}$ est $\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} u^{-1/2}$ qui d'après (d) s'écrit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{u^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

(e) nous conduit directement à la dérivée de $\sqrt{u}$ qui vaut $u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Ceci conclu en démontrant la Formule (5) !!!

En espérant vous avoir rappelé de bons souvenirs et assouvi votre curiosité.

Votre E-Prof de maths.